

Kronecker Algebra zur Optimierung des Eisenbahnbetriebes

Der Eisenbahnbetrieb kann durch Anwendung von Algorithmen aus der Informatik optimiert werden. Während die Optimierung einer isolierten Einzelfahrt gängige Praxis ist, liegt die Herausforderung in der Optimierung des Gesamtsystems unter Berücksichtigung aller Zugsfahrten, deren Abhängigkeiten und Wechselwirkungen. Dafür eignet sich die Kronecker Algebra in besonderer Weise, da komplexe Probleme einfach zu lösen sind. Ziel ist es, außerplanmäßige Halte zu verhindern und energieverbrauchsoptimierte Fahrempfehlungen umzusetzen.

1. EINLEITUNG

Dieser Artikel beschreibt die Funktionsweise eines neu entwickelten Algorithmus zur Optimierung des Gesamtenergieverbrauchs im Eisenbahnbetrieb, der auf den Erkenntnissen der Dissertation [1] basiert. Im Rahmen des Forschungsprojekts EcoRailNet haben die Österreichischen Bundesbahnen (ÖBB), THALES Österreich und das Institut für Rechnergestützte Automation der Technischen Universität Wien erfolgreich zusammengearbeitet.

Die folgenden Rahmenbedingungen dienen dabei als Ausgangspunkt für die Entwicklung und mussten bei der Berechnung von Lösungsvorschlägen zwingend eingehalten werden:

- Sicherheit: Es muss gewährleistet sein, dass sich zu jedem Zeitpunkt maximal ein Zug innerhalb eines Blockabschnitts befindet. Dabei werden die höchst zulässige Streckengeschwindigkeit, etwaige Langsamfahrstellen und die höchst zulässige Zugeschwindigkeit ebenfalls berücksichtigt.
- Pünktlichkeit: Jeder Zug muss innerhalb eines vordefinierten Fahrplans abfahren bzw. ankommen. Dies setzt voraus, dass die geplanten Fahrzeiten auch physikalisch möglich sind. Bestehende Fahrpläne weisen typischerweise Fahrzeitreserven im Bereich von 3 bis 7% der technischen Fahrzeit auf [2].
- Fahrkomfort: Für die Triebfahrzeugführer muss es möglich sein, den berechneten Geschwindigkeitsempfehlungen zu folgen. Daraus ergibt sich die Anforderung,

dass die Anzahl der Eingriffe in die Fahrstrategie möglichst gering gehalten werden sollte. Außerdem muss die Einstellbarkeit von Geschwindigkeitsempfehlungen am jeweiligen Treibfahrzeug berücksichtigt werden. Zusätzlich soll der Komfort der Passagiere durch häufige Brems- und Beschleunigungsvorgänge nicht negativ beeinflusst werden.

- Energie-optimierte Fahrstrategie: Unter Einhaltung der obigen Anforderungen soll einerseits eine möglichst effiziente Fahrstrategie für jeden Zug innerhalb des betrachteten Systems berechnet und ausgegeben sowie andererseits der Gesamtenergiebedarf aller Züge im System minimiert werden, wobei nur die Traktionsenergie

in die Berechnungen einfließt und Zusatzverbraucher (z.B. Klimaanlage) nicht berücksichtigt werden.

Im folgenden Kapitel werden aktuell im Einsatz befindliche Modelle zur Optimierung einer einzelnen Zugfahrt und des Gesamtsystems betrachtet.

Anschließend folgt ein kurzer Überblick über das physikalische Modell und die Berechnung der optimierten Einzelfahrt. Den wesentlichsten Teil bilden das mathematische Modell der sogenannten Kronecker Algebra und die Optimierung des Gesamtsystems.

2. ÜBERBLICK ÜBER AKTUELLE MODELLE

Dieser Abschnitt befasst sich mit aktuellen



Dipl.-Ing. Dr. techn. Mark Stefan
AIT – Austrian Institute
of Technology
mark.stefan@ait.ac.at



Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Johann Blieberger
Technische Universität Wien
Institut für Rechnergestützte
Automation
blieb@auto.tuwien.ac.at



Privdoz. Dipl.-Ing. Dr. techn. Andreas Schöbel
OpenTrack Railway Technology
GmbH
andreas.schoebel@opentrack.at

Modellen zur Einzelfahrt- und Gesamtsystemoptimierung und zeigt die Probleme für praktische Anwendungen bzw. die Einschränkungen für den Einsatz in realen Systemen.

2.1. EINZELFAHRTOPTIMIERUNG

Albrecht [3] präsentiert ein Modell zur Berechnung der optimalen Fahrkurve, das eine Beschleunigungsphase, eine Phase mit konstanter Geschwindigkeit, gefolgt von einer Ausroll- und Bremsphase enthält, jedoch nur für Strecken mit konstantem Gradienten entwickelt wurde.

Howlett et al. präsentieren in [4, 5, 6, 7 und 8] Modelle zur Berechnung der optimalen Fahrstrategie einer Einzelfahrt mit einer hohen Anzahl an Fahrempfehlungen, wodurch sich eine praktische Anwendung anschließt. Eine Vielzahl anderer Publikationen

zeigt ebenfalls Modelle, die durch diverse Einschränkungen nicht für die Anwendung in realen Systemen geeignet sind. Darunter fallen wie – bereits erwähnt – zu häufig wechselnde Fahrempfehlungen (z.B. [9] und [10]), die Behandlung des Zuges als punktförmige Masse mit 1 kg (z.B. [11, 12 und 13]) oder zu hohe Berechnungszeiten [14]. Es lässt sich festhalten, dass bereits eine Vielzahl an theoretischen Modellen entwickelt wurde, viele davon allerdings nicht für den Einsatz im Realsystem geeignet sind (vgl. auch [15, 16, 17 und 18]).

2.2. GESAMTSYSTEMOPTIMIERUNG

In der Schweiz entstanden in den letzten Jahren mehrere Publikationen, die sich mit der Optimierung des Gesamtsystems beschäftigen (vgl. [19, 20, 21 und 22]), im Speziellen mit der Optimierung im Lötschberg-Basistunnel ([23, 24]). Da es sich bei dem vorgestellten System um ein relativ einfaches Bahnnetz handelt, für dessen Optimierung jedoch eine hohe Berechnungszeit benötigt wird, kann davon ausgegangen werden, dass die Berechnungszeit für komplexe Topologien dementsprechend ansteigt und das Modell somit für den Einsatz in Echtzeit ungeeignet ist. Ebenfalls in der Schweiz wurden andere Ansätze (z.B. [25, 26, 27 und 28]) entwickelt, in denen sogenannte Compensation Zones und Condensation Zones gebildet werden, um zwischen dem hohen Verkehrsaufkommen in der Nähe von Bahnhöfen und einem geringerem Aufkommen dazwischen zu unterscheiden. In diesem Modell werden vorberechnete Geschwindigkeitsprofile verwendet, was gewisse Nachteile nach sich zieht. Bekannte Methoden oder Algorithmen wurden ebenfalls dafür verwendet, um ein Bahnsystem zu modellieren, allerdings ergeben sich in vielen Bereichen gravierende Nachteile. Beispiele dafür sind Banker's Algorithmus in [29], bei dem Streckenabschnitte blockiert werden, obwohl keine Gefahr eines Deadlocks besteht, Petri Netze in [30 und 31] oder auch Modelle, deren Ergebnisse als falsch positiv eingestuft werden (vgl. [32 und 33]).

3. EINZELFAHRTOPTIMIERUNG

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Optimierung einer einzelnen Zugfahrt. Zuvor wird auf das physikalische Modell verwiesen, das als Grundlage für die Berechnung dient.

3.1. PHYSIKALISCHES MODELL

Um möglichst realistische Berechnung durchführen zu können, besteht Bedarf an

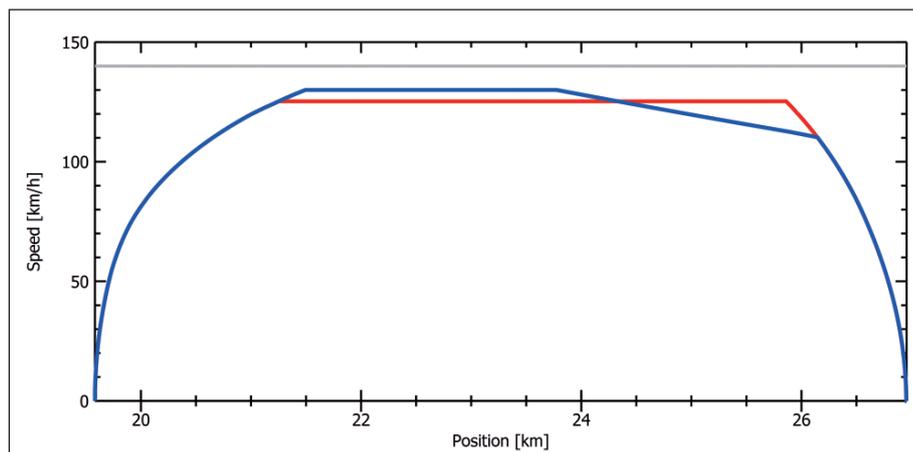


BILD 1: Optimale Fahrkurve

einem detaillierten physikalischen Modell, das diverse Zug- und Streckenparameter enthält. Die zugrunde liegende Dissertation behandelt das physikalische Modell im Detail und gibt eine Übersicht über Formeln und verwendete Parameter. Aus Platzgründen wird in diesem Artikel auf eine nähere Betrachtung verzichtet.

3.2. BERECHNUNG DER FAHREMPFEHLUNGEN

Wie bereits im Kapitel 2.1 erwähnt, existiert eine Vielzahl an Publikationen, die sich mit der Optimierung der Einzelfahrt beschäftigen, allerdings sind die meisten Modelle nicht für die praktische Anwendung geeignet.

Die Ergebnisse zahlreicher wissenschaftlicher Arbeiten (z.B. [3, 34]) haben gezeigt, dass sich eine optimierte Einzelfahrt aus einer Teilmenge der Fahrmodi Beschleunigung, Halten der aktuellen Geschwindigkeit, Ausrollen und Bremsen zusammensetzt. Grundsätzlich können sich diese Typen beliebig oft wiederholen. Wählt man die maximale Länge einer Phase möglichst klein, so kann die optimale Fahrt in Bezug auf den Energieverbrauch berechnet werden. Allerdings besteht diese Fahrt möglicherweise aus einer Vielzahl an Wechslen der Fahrmodi, was in der Praxis aufgrund der Reaktionszeiten von Mensch und Triebfahrzeug nicht durchführbar wäre bzw. den Komfort der Passagiere (z.B. durch häufiges Beschleunigen) negativ beeinflussen würde.

Um die Anzahl der Fahrmodi und somit die Fahrbarkeit und den Komfort zu gewährleisten, wurde eine Methode entwickelt, bei der innerhalb eines Bereichs mit gleichbleibender Maximalgeschwindigkeit jeder Modus nur einmal auftreten kann. Eine genaue Beschreibung der Methode, Implementierungsdetails und zahlreiche Beispiele finden sich in [1].

Das optimale Geschwindigkeitsprofil für eine Strecke mit konstanter Streckenhöchstgeschwindigkeit ist in Bild 1 (blaue Kurve) dargestellt. Die rote Linie zeigt die Strategie ohne Ausrollphase, die typischerweise in der Praxis oft Anwendung findet. Durch die höhere Halte-Geschwindigkeit in der optimierten Fahrt und die anschließende Ausrollphase kann die benötigte Traktionsenergie in diesem Beispiel von 42,386 kWh auf 37,908 kWh gesenkt werden, was einer Einsparung von ca. 11,8% entspricht. Bei diesem Beispiel wurde ein Fahrzeug ohne Rückspeisung der Bremsenergie verwendet. Andernfalls würde sich das Einsparungspotential entsprechend verringern.

4. KRONECKER ALGEBRA ALS BASIS FÜR DIE GESAMTOPTIMIERUNG

Die sogenannte Kronecker Algebra ist ein mathematisches Modell, das sich der Matrizenrechnung bedient und sich aus Kronecker Summe und Kronecker Produkt zusammensetzt. Sie wurde in der Informatik eingeführt, um den Zugriff von mehreren Prozessen auf einen gemeinsamen Speicher zu modellieren [35]. Die Modifikation für den Einsatz in Bahnsystemen wurde erstmals in [36] vorgestellt und in mehreren Publikationen auf diverse Anwendungsgebiete im Bahnbetrieb erweitert (vgl. [1, 37, 38, 39, 40, 41, 42]). Beispiele hierfür sind unter anderem das Auffinden von Konflikten (Deadlocks und Auflaufen), die Berechnung der maximalen Fahrzeit aller im System befindlichen Züge oder auch die Analyse der Fahrstrategie unter Bezugnahme auf die vorhandene Traktionsenergie.

Der Zugriff auf die gemeinsam genutzte Ressource – in diesem Fall der Streckenabschnitt – wird mittels Semaphore aus der Informatik [43] modelliert, um zu gewährleisten, dass jeder Block zu jedem Zeitpunkt von »

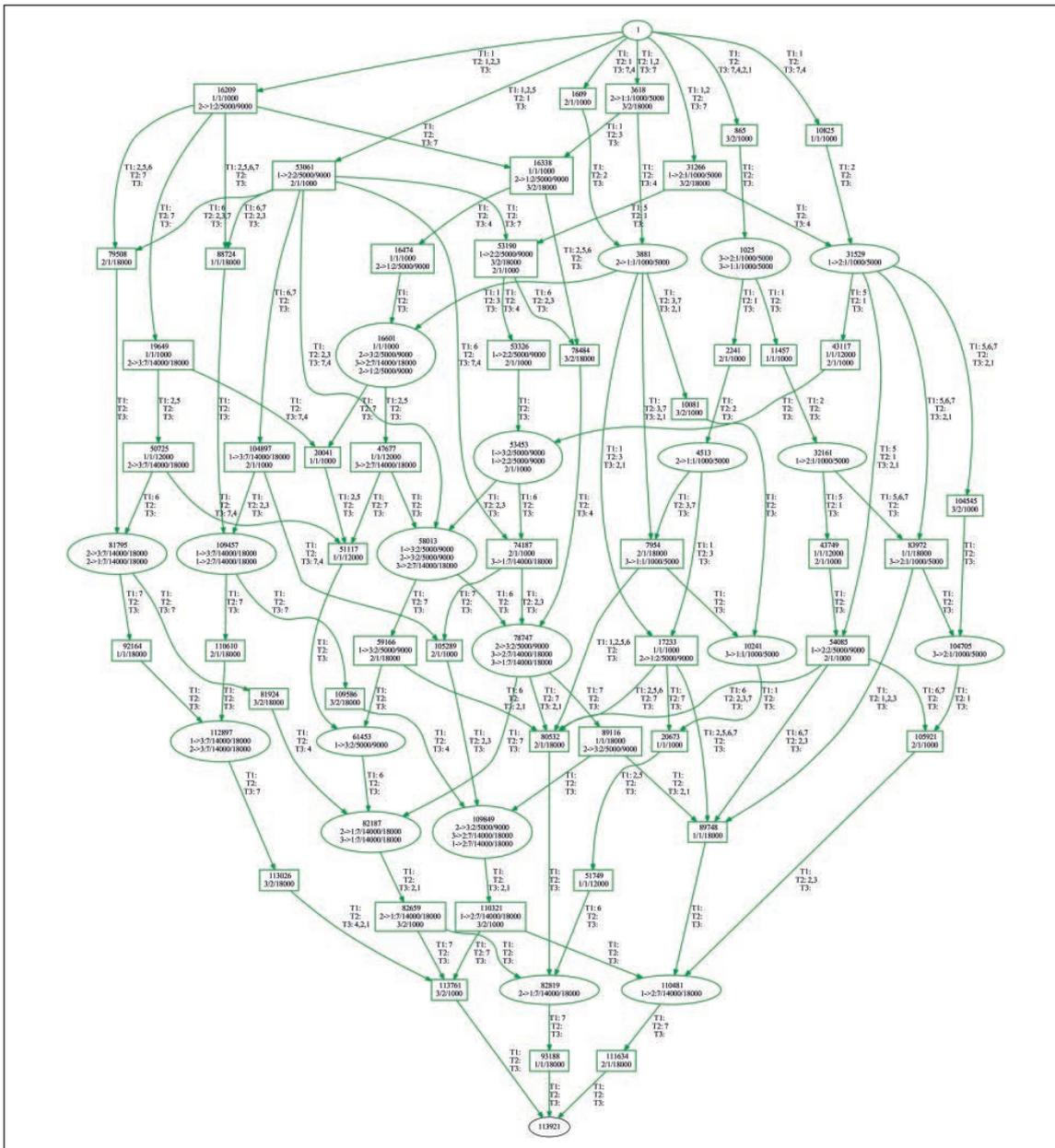


BILD 3: Graph nach dem vierten Reduktionsschritt

2. Ähnlich wie in Schritt 1 wird der Graph traversiert, allerdings beginnend beim Endknoten. Dabei werden die Vorgänger gespeichert bis der Startknoten erreicht wird, mit der Einschränkung, dass nur Knoten besucht werden, die bereits im ersten Schritt erreicht wurden. Dadurch entfallen jene Knoten, die Deadlocks darstellen¹⁾. Zusätzlich werden die besuchten Knoten untersucht, ob es sich dabei um Synchronisationsknoten²⁾ oder Stopp-Knoten³⁾ handelt, die wiederum

in einer eigenen Datenstruktur abgelegt werden. Durch diesen Schritt der Reduktion verkleinert sich der Graph auf 475 Knoten, wobei sich darunter 222 Stopp-Knoten, 40 Synchronisationsknoten, 21 gemischte Knoten (sowohl Stopp- als auch Synchronisationsknoten) und 234 normale Knoten befinden.

3. Dieser Schritt besteht darin, dass nicht benötigte Synchronisations- oder Stopp-Knoten als normale Knoten markiert werden. Dafür werden die Synchronisations- bzw. Stopp-Knoten untersucht, ob mehrere davon in einer Kette existieren, d.h. mehrere Knoten mit der gleichen Synchronisations- oder Stopp-Bedingung sind miteinander verbunden. In diesem Fall genügt es, wenn der letzte Knoten dieser Kette als Synchronisations- bzw. Stopp-Knoten markiert ist.

Dieser Reduktionsschritt verringert zwar nicht die Gesamtanzahl an Knoten, aber die Anzahl an Synchronisations- bzw. Stopp-Knoten wird reduziert. Im angeführten Beispiel ergibt sich eine Reduktion von 222 auf 49 Stopp-Knoten, die Anzahl an normalen Knoten erhöht sich dadurch von 234 auf 407.

4. Im letzten Schritt der Reduktion werden alle normalen Knoten und die entsprechenden Kanten aus dem Graphen entfernt. Dadurch entsteht ein deutlich kleinerer Graph, der lediglich aus dem Start- und dem Zielknoten besteht und alle verbleibenden Synchronisations- und Stopp-Knoten enthält. Die Knoten werden wieder verbunden und die daraus entstehenden Kanten mit den Operationen der zuvor entfernten Kanten beschriftet. Der verbleibende Graph des Bei- »

1) Ein Deadlock ist dadurch gekennzeichnet, dass kein Pfad innerhalb des Graphen zum Endknoten führt [35].
 2) Ein Synchronisationsknoten enthält eine Freigabe (v-Operation) eines bestimmten Abschnittes als Eingangskante und die Reservierung (p-Operation) desselben Knotens, wobei die Operationen von unterschiedlichen Zügen durchgeführt werden [36].
 3) Stopp-Knoten beinhalten den planmäßigen Stopp eines Zuges in einem Bahnhof [31].

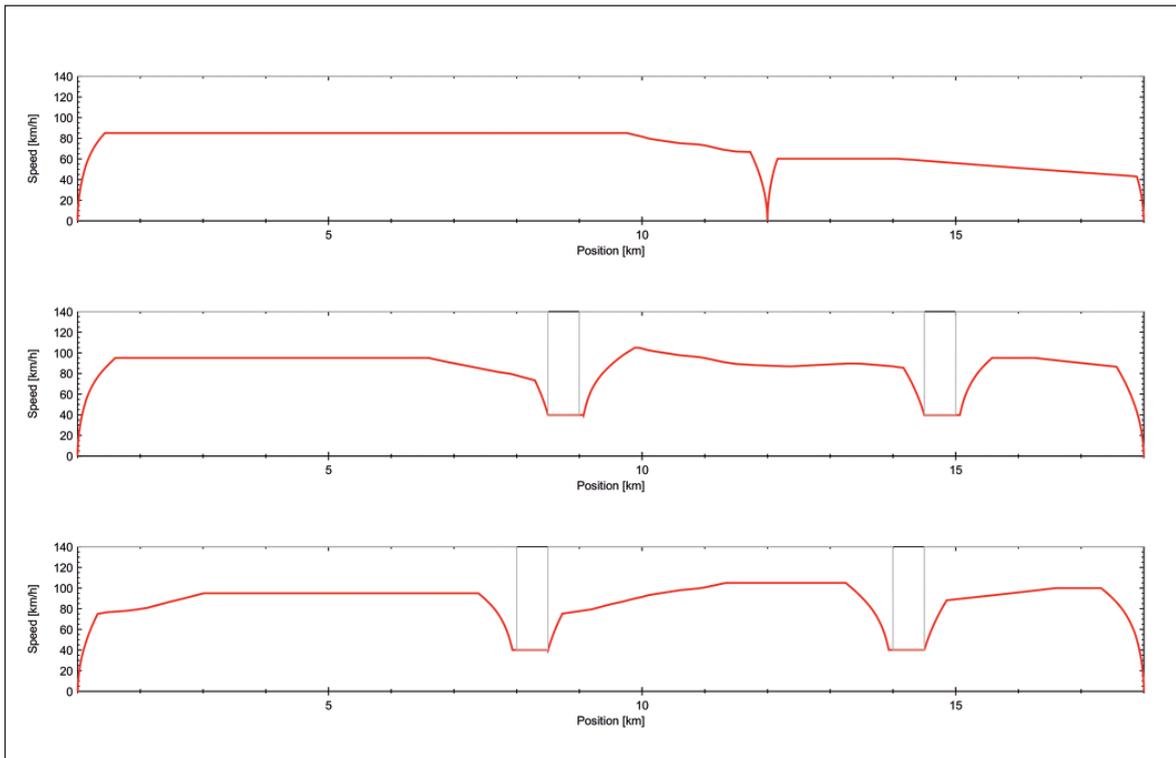


BILD 4: Resultierende Fahrstrategien für den konfliktfreien Fahrplan

spiels enthält nun insgesamt 112 Knoten (Start- und Zielknoten, Synchronisations- und Stopp-Knoten, gemischte Knoten).

5.3. BESTIMMUNG ALLER MÖGLICHEN ZUGROUTEN

Nachdem der Graph auf die relevanten Knoten reduziert wurde (Bild 3), müssen im nächsten Schritt alle möglichen Kombinationen an Zugrouten gefunden werden. Da unter Umständen für die Züge mehrere mögliche Routen zwischen Start und Ziel angegeben wurden (vgl. Alternative Routen in [38]), können mehrere mögliche Kombinationen an Zugbewegungen gefunden werden, die durch unterschiedliche Pfade im Graphen repräsentiert werden. Somit werden alle Pfade zwischen Start- und Zielknoten untersucht und in einer Liste abgespeichert, sofern sich die Pfade in den besuchten Gleisabschnitten unterscheiden. Im obigen Beispiel gibt es zwar mehrere Pfade zwischen Start- und Zielknoten, aber nur eine mögliche Route für jeden Zug, wobei auf alle Synchronisationsbedingungen geachtet werden muss.

5.4. BERECHNUNG DER OPTIMALEN FAHRSTRATEGIEN

Der letzte Schritt der Optimierung des Gesamtsystems besteht darin, dass für jeden Zug innerhalb der unterschiedlichen Routen

die optimale Fahrstrategie berechnet wird. Hier muss auf die Synchronisationsknoten geachtet werden und der Zeitpunkt und die Geschwindigkeit des Ein- und Ausfahrens entsprechend angepasst werden. Durch den gegebenen Fahrplan und das physikalische Modell der Züge bzw. der Strecke können früheste und späteste Zeitpunkte bzw. minimale und maximale Geschwindigkeit des Ein- und Ausfahrens berechnet werden. Diese Zeitpunkte und Geschwindigkeitswerte werden als Minima bzw. Maxima für die Berechnung der Fahrstrategie verwendet. Für große Intervalle zwischen Minimum und Maximum werden zusätzliche Zeitpunkte bzw. Geschwindigkeitswerte⁴⁾ und deren Kombinationen herangezogen, wodurch sich eine Vielzahl an möglichen Fahrstrategien ergibt. Letztendlich muss überprüft werden, ob die Sicherheitsaspekte eingehalten werden.

Eine detaillierte Beschreibung der verwendeten Formeln, der Berechnung von minimalen und maximalen Zeitpunkten und Geschwindigkeitswerten des Ein- und Ausfahrens, zahlreiche Definitionen sowie eine genaue Beschreibung der Synchronisationen kann der Dissertation [1] entnommen werden.

Die möglichen Fahrstrategien werden nach dem Algorithmus der Einzelfahrtoptimierung berechnet. Das Gesamtergebnis setzt sich aus der minimalen Summe der Einzelfahrten zusammen.

⁴⁾ Die Anzahl an Zeitpunkten bzw. Geschwindigkeitswerten ist im entwickelten Algorithmus einstellbar (vgl. [31]).

Zug	Abschnitt	Ankunft	Abfahrt	Fahrzeit
T ₁	1		09:23:00	
	5	09:31:30	09:41:30	510 s
	7	09:48:30		420 s
T ₂	1		09:01:00	
	7	09:14:00		780 s
T ₃	7		09:27:30	
	1	09:40:30		780 s

TABELLE 1: Konfliktfreier Fahrplan

Zug	Abschnitt	Ankunft	Abfahrt	Fahrzeit
T ₁	1		09:23:00	
	5	09:31:30	09:41:30	510 s
	7	09:48:30		420 s
T ₂	1		09:27:30	
	7	09:40:30		780 s
T ₃	7		09:29:30	
	1	09:42:30		780 s

TABELLE 2: Konfliktbehafteter Fahrplan

Für das präsentierte Beispiel wird der Fahrplan aus Tabelle 1 angenommen, der konfliktfrei konstruiert wurde. Die resultierenden Fahrstrategien der drei Züge sind in Bild 4 dargestellt.

Wird der Fahrplan laut Tabelle 2 modifiziert, entstehen Überlappungen bei der Belegung einiger Abschnitte. Durch den vorgestellten Algorithmus werden die möglichen Zugbewegungen unter Einhaltung

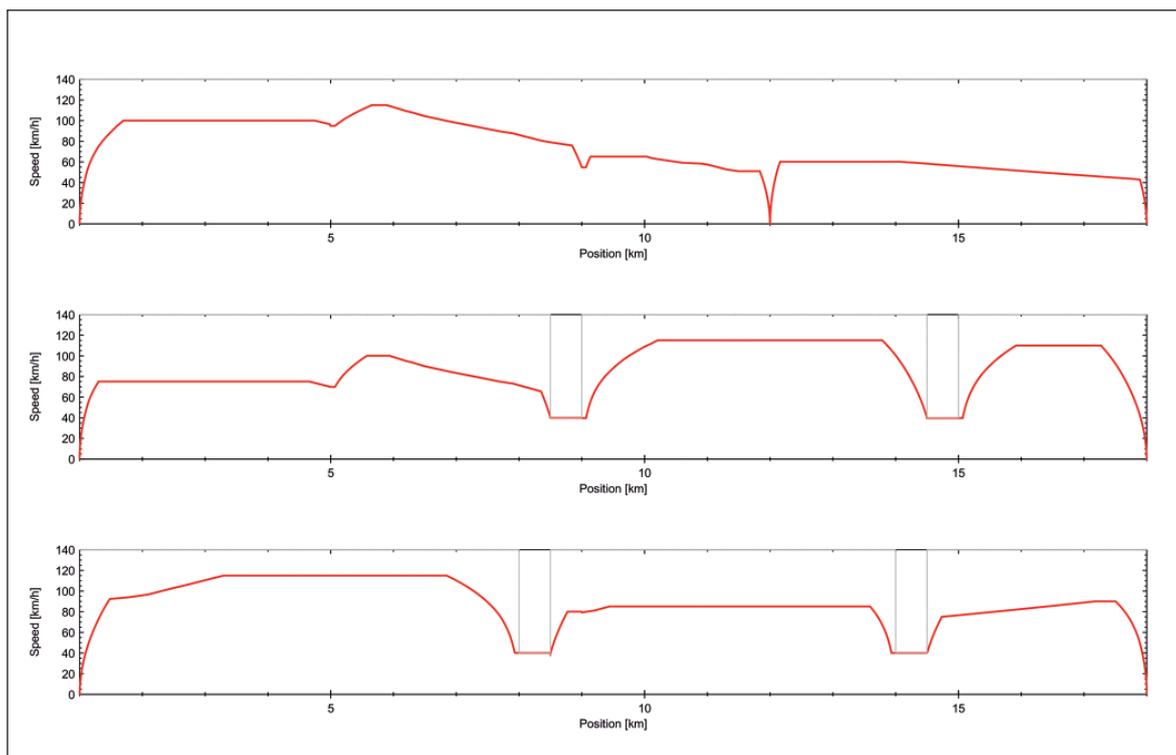


BILD 5:
Resultierende Fahrstrategien für den konfliktbehafteten Fahrplan

der geforderten Rahmenbedingungen (Sicherheit, Pünktlichkeit, Komfort) berechnet und die optimalen Fahrkurven (Bild 5) berechnet.

Für den konfliktfreien Fahrplan ergibt sich ein Gesamtenergieverbrauch von 116,101 kWh, durch die Verschiebung der Abfahrts- und Ankunftszeiten im zweiten Fall erhöht sich der Gesamtverbrauch auf 122,946 kWh.

Eine Auflistung der verwendeten Zug- und Streckendaten kann der zugrunde liegenden Dissertation entnommen werden, ebenso wie Abbildungen der Sperrzeitentuppen zu den präsentierten Szenarien.

6. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In diesem Artikel wurden die wesentlichen Erkenntnisse aus der zugrunde liegenden Dissertation zur Optimierung des Traktionsenergieverbrauchs im Eisenbahnbetrieb vorgestellt. Der entwickelte Algorithmus basiert auf der sogenannten Kronecker Algebra. Mit Hilfe dieses mathematischen Modells lassen sich alle möglichen Zugsbewegungen im System berechnen, Deadlocks ausschließen und Synchronisationspunkte zwischen Zügen finden. Im Vergleich zu anderen Modellen und Simulationsprogrammen kann das vollständige System mit allen Bewegungen der Züge und Verwendung der Abschnitte betrachtet und als Basis für weitere Berechnungen verwendet werden. »



Die 43. Europäische Transportkonferenz
28. - 30. September 2015
Goethe-Universität, Frankfurt am Main

Tagesprogramm angekündigt – Jetzt buchen!

Die diesjährige ETC-Konferenz wartet mit einem breiten Spektrum an Referenten aus der Verkehrsbranche sowie detaillierten Präsentationen zum Thema Strategie, bewährte Praxis und Forschungsergebnisse auf. Auf der 3-tägigen Konferenz finden jeden Tag mindestens neun Parallelveranstaltungen mit jeweils drei oder vier Präsentationen zu einem bestimmten Thema statt.

Vor Ort werden Wissenschaftler, Dozenten, Analysten, Berater und Manager ihre Fachkenntnisse im Bereich Verkehr mit Themen rund um Fairness im Verkehr und Plänen für die Zukunft bis hin zu Verkehr und Emissionen mit den Konferenzteilnehmern austauschen.

AET/ECTRI-Mitglieder	1 Tag*	2 Tage*	3 Tage/Rover*
Einzelteilnehmer	€390	€780	€1050
Firmenteilnehmer	€380	€760	€1010
Nicht-Mitglieder	€440	€880	€1240

Die Konferenz bietet allen Teilnehmern eine ausgezeichnete Gelegenheit zur Kontaktpflege mit Verkehrsexperten aus aller Welt sowie das Gefühl der Zugehörigkeit und Teilnahme an einer Fachgemeinschaft.

Sehen Sie sich unter www.etcproceedings.org das Programm an oder buchen Ihren Platz oder wenden Sie sich unter sabrina@aetransport.org an Sabrina Winter.



*Auf alle Teilnahmegebühren wird zusätzlich eine Mehrwertsteuer von derzeit 20 % aufgeschlagen. Teilnehmer aus den neuen EU-Mitgliedstaaten sowie junge Wissenschaftler und Praktiker erhalten einen Rabatt auf die Teilnahmegebühr. Ausführliche Angaben siehe unsere Website.

Die Einzelfahrtoptimierung ermöglicht die Erzeugung von Geschwindigkeitsprofilen, die in realen Systemen dem Triebfahrzeugführer zur Verfügung gestellt werden können. Um einen sicheren und effizienten Betrieb zu gewährleisten, müssen sowohl die relevanten Eingangsdaten in Echtzeit als auch ausreichend leistungsstarke Rechner zur Verfügung stehen.

Um das Potential der aktuellen Hardware nutzen zu können und eine möglichst gute Performance zu erzielen, wurde der Algorithmus speziell für Multi-Core-Systeme entwickelt und in der Programmiersprache Ada geschrieben.

Besonders bietet sich die Anwendung des Algorithmus bei bereits hochgradig automatisierten Eisenbahnsystemen, wie beispielsweise einer fahrerlosen Metro an, da hier die aktuelle Position jedes Zuges hinreichend genau bekannt ist und Abweichungen aus dem Betrieb sofort erkannt werden. Damit kann jederzeit eine neue, aber bereits optimierte Fahrstrategie ermittelt und an alle beteiligten Züge übertragen werden. ◀

Literatur

[1] M. Volcic, Energy-efficient Optimization of Railway Operation. An Algorithm based on Kronecker Algebra, Wien, Österreich, 2015.
 [2] UIC International Union of Railways, UIC Merkblatt 451-1, 2000.
 [3] T. Albrecht, „Energy-Efficient Train Operation,“ in Railway, Timetable & Traffic: Analysis, Modelling, Simulation, Eurailpress, 2008, p. 83-105.
 [4] A. Albrecht, P. Howlett, P. Pudney und X. Vu, „Optimal train control: Analysis of a new local optimization principle,“ American Control Conference (ACC), pp. 1928-1933, Juni 2011.
 [5] J. Cheng, Y. Davydova, P. Howlett und P. Pudney, „Optimal driving strategies for a train journey with non-zero track gradient and speed limits,“ IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry, pp. 89-115, 1999.
 [6] P. Howlett, „Optimal strategies for the control of a train,“ Automatica, pp. 519-532, 1996.
 [7] P. Howlett, „The Optimal Control of a Train,“ Annals of Operations Research, pp. 65-87, 2000.
 [8] P. Howlett und P. Pudney, Energy-Efficient Train Control. Advances in Industrial Control, Springer, 1995.
 [9] I. M. Golovitcher, „Energy efficient control of rail vehicles,“ 2001 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, pp. 658-663, 2001.
 [10] R. Liu und I. M. Golovitcher, „Energy-efficient operation of rail vehicles,“ Transportation Research Part A: Policy and Practice, pp. 917-932, Juli 2003.
 [11] R. Franke, M. Meyer und P. Terwiesch, „Optimal Control of the Driving of Trains,“ Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs- und Informationstechnik, pp. 606-613, Dezember 2002.
 [12] R. Franke, P. Terwiesch und M. Meyer, „An algorithm for the optimal control of the driving of trains,“ Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2123-2128, Dezember 2000.
 [13] E. Khmel'nitsky, „On an Optimal Control Problem of Train Operation,“ IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, pp. 1257-1266, Juli 2000.
 [14] M. Miyatake und H. Ko, „Optimization of train speed profile for minimum energy consumption,“ IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering, pp. 263-269, April 2010.
 [15] M. Ellinger, „Energiesparende Fahrweise unter Berücksichtigung betrieblicher und technischer Parameter,“ Diplomarbeit, Fachhochschule St.Pölten, 2013.

[16] U. Linder, „Optimierung von Fahrweisen im spurgeführten Verkehr und deren Umsetzung,“ Dissertation, Technische Universität Berlin, 2004.
 [17] A. Schöbel, B. Rüger, A. Nash, J. Zajcsek, M. Turk und H. Dannenberg, „The potential for saving energy by more precisely calculating station dwell times on commuter rail service,“ in 3rd International Seminar on Railway Operations Modelling and Analysis: Rail-Zurich2009 Conference, Zürich, Schweiz, 2009.
 [18] Y. Wang, B. Ning, F. Cao, B. D. Schutter und T. van den Boom, „A survey on optimal trajectory planning for train operations,“ 2011 IEEE International Conference on Service Operations, Logistics, and Informatics (SOLI), pp. 589-594, Juli 2011.
 [19] M. Lüthi, „Evaluation of energy saving strategies in heavily used rail networks by implementing an integrated real-time rescheduling system,“ in Power Supply, Energy Management, and Catenary Problems, WIT Press, 2010, pp. 75-86.
 [20] F. Mehta, C. Rößiger und M. Montigel, „Latent energy savings due to the innovative use of advisory speeds to avoid occupation conflicts,“ in Computers in Railways XII: Computer System Design and Operation in Railways and Other Transit Systems (WIT Transactions on the Built Environment), WIT Press, 2010, pp. 99-108.
 [21] X. Rao, M. Montigel und U. Weidmann, „Railway capacity optimization by integration of real-time rescheduling and automatic train operation,“ in IT13.RAIL, Zürich, Schweiz, 2013.
 [22] X. Rao, M. Montigel und U. Weidmann, „Holistic optimization of train traffic by integration of automatic train operation with centralized train management,“ in Computers in Railways XIII: Computer System Design and Operation in the Railway and Other Transit Systems (Wit Transactions on the Built Environment), WIT Press, 2012, pp. 39-50.
 [23] M. Montigel, „Innovatives Bahnleitsystem optimiert den Zugverkehr im Lötschberg-Basistunnel,“ Signal + Draht, pp. 18-22, September 2008.
 [24] M. Montigel, „Operations control system in the Lötschberg Base Tunnel,“ European Rail Technology Review, pp. 42-44, 2009.
 [25] G. Caimi, F. A. Chudak, M. Fuchsberger, M. Laumanns und R. Zenklusen, „A new resource-constrained multi-commodity flow model for conflict-free train routing and scheduling,“ Transportation Science, pp. 212-227, Mai 2011.
 [26] G. Caimi, M. Fuchsberger, D. Burkolter, T. Herrmann, R. Wüst und S. Roos, „Conflict-free train scheduling in a compensation zone exploiting the speed profile,“ in 3rd International Seminar on Railway Operations Modelling and Analysis (ISROR), Zürich, Schweiz, 2009.
 [27] G. Caimi, M. Fuchsberger, M. Laumanns und M. Lüthi, „A model predictive control approach for discrete-time rescheduling in complex central railway station areas,“ Computers & Operations Research, pp. 2578-2593, 2012.
 [28] G. Caimi, M. Laumanns, K. Schüpbach, S. Wörner und M. Fuchsberger, „The periodic service intention as a conceptual frame for generating timetables with partial periodicity,“ Transportation Planning and Technology, pp. 323-339, 2011.
 [29] Y. Cui, „Simulation-Based Hybrid Model for a Partially-Automatic Dispatching of Railway Operation,“ Dissertation, Universität Stuttgart, 2010.
 [30] M. P. Fanti, A. Giua und C. Seatzu, „A deadlock prevention method for railway networks using monitors for colored petri nets,“ IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, pp. 1866-1873, Oktober 2003.
 [31] M. Zarnay, „Solving deadlock states in model of railway station operation using coloured petri nets,“ Proceedings of Symposium FORMS/FORMAT - Formal Methods for Automation and Safety in Railway and Automotive Systems, pp. 205-213, 2008.
 [32] J. Pachl, „Steuerlogik für Zuglenkanlagen zum Einsatz unter stochastischen Betriebsbedingungen,“ Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1993.
 [33] J. Pachl, „Timetable Design Principles,“ in Railway, Timetable & Traffic: Analysis, Modelling, Simulation, Eurailpress, 2008, pp. 9-42.
 [34] D. Lee, I. P. Milroy und K. Tyler, „Application of Pontryagin's Maximum Principle to the Semi-automatic Control of Rail Vehicles,“ Proceedings of the Second Conference on Control Engineering, p. 233-236, 1982.
 [35] R. Mittermayr und J. Blieberger, „Shared Memory Concurrent System Verification using Kronecker Algebra,“ Wien, Österreich, 2011.

[36] R. Mittermayr, J. Blieberger und A. Schöbel, „Kronecker Algebra based Deadlock Analysis for Railway Systems,“ PROMET-TRAFFIC & TRANSPORTATION, p. 359-369, 2012.
 [37] M. Volcic, J. Blieberger und A. Schöbel, „Kronecker Algebra based Travel Time Analysis for Railway Systems,“ FORMS/FORMAT 2012 – 9th Symposium on Formal Methods for Automation and Safety in Railway and Automotive Systems, p. 273-281, Dezember 2012.
 [38] M. Volcic, J. Blieberger und A. Schöbel, „Kronecker algebra and its broad applications in railway systems,“ EURO-ŽEL 2013: Recent Challenges for European applications in railway systems, p. 275-282, Juni 2013.
 [39] M. Volcic, J. Blieberger und A. Schöbel, „Kronecker algebra as a frame for optimisation of railway operation,“ 21st International Scientific Conference – TRANSPORT 2013; Mechanics Transport Communications, p. 57-63, Oktober 2013.
 [40] M. Volcic, J. Blieberger und A. Schöbel, „Kronecker algebra based modelling of railway operation,“ Proceedings of the 3rd International Conference on Models and echnologies for Intelligent Transportation Systems (MT-ITS), p. 345-356, Dezember 2013.
 [41] M. Volcic, J. Blieberger und A. Schöbel, „Kronecker-Algebra und ihre breit gefächerten Anwendungen im Eisenbahnbereich,“ Signal + Draht, p. 15-18, Juli/August 2014.
 [42] M. Volcic, J. Blieberger und A. Schöbel, „Optimisation of railway operation by application of Kronecker algebra,“ CETRA 2014, p. 37-42, April 2014.
 [43] E. W. Dijkstra, „Over Seinpalen,“ 1965.

► SUMMARY

Optimising railway operations using Kronecker algebra

This article presents an algorithm for optimizing the energy consumption in railway systems. It is divided into two parts, namely the single trip optimization to calculate optimized driving strategies and the system optimization which is based on Kronecker Algebra and produces graphs representing all possible movements of the involved trains within the railway network. The algorithm considers important restrictions like safety, punctuality, passenger- and driver-comfort and minimal energy-consumption. The optimization of railway systems provides a high potential of energy savings and can be used as basis for further development like automated train control.