Grundzüge der Informatik

- Organisation
  - Testergebnisse nach den Feiertagen (vor dem zweiten Test)
  - Einsichtnahme gemeinsam mit Einsichtnahme zweiter Test

- Was kommt zum Test?
  - Buch „Informatik – Grundlagen“
  - Wissensfragen und Rechenbeispiele

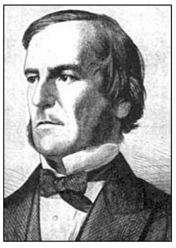
- 3 Vorträge zur Übung
  - Boolesche Algebra, Minimierungsverfahren
  - Fuzzy Logik, Negative Zahlen
  - Numerik

Boolesche Algebra

Ablauf:

Einleitung
Normalformen
Vereinfachung
Algebraische Umformungen
Quine-McCluskey
Karnaugh-Veitch
Zusammenfassung

George Boole (1815-1864)



The Mathematical Analysis of Logic

Einleitung

- Wertemenge
- Operationen

a	b	a ∧ b	a ∨ b	¬a
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

- Gesetze
  - Kommutativgesetz

$$a \land b = b \land a$$
$$a \lor b = b \lor a$$

  - Assoziativgesetz

$$a \land (b \land c) = (a \land b) \land c)$$
$$a \lor (b \lor c) = (a \lor b) \lor c)$$

  - Distributivgesetz

$$a \land (b \lor c) = (a \land b) \lor (a \land c)$$
$$a \lor (b \land c) = (a \lor b) \land (a \lor c)$$

De Morgansche Gesetze

$$\neg(a \lor b) = \neg a \land \neg b$$

$$\neg(a \land b) = \neg a \lor \neg b$$

Augustus De Morgan

(1806-1871)

a	b	(a ∧ b)	¬(a ∧ b)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

a	b	¬a	¬b	¬a ∨ ¬b
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Normalformen

- Minterm (Vollkonjunktion): Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen konjunktiv verbunden sind.

  $(\neg a \wedge b)$ oder $(\neg a \wedge \neg b)$ oder $(a \wedge b)$

- Maxterm (Volldisjunktion): Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen disjunktiv verbunden sind.

  $(\neg a \vee b)$ oder $(\neg a \vee \neg b)$ oder $(a \vee b)$

- Disjunktive Normalform: Darstellungsart einer booleschen Funktion, bei der eine Reihe von Vollkonjunktionen disjunktiv verknüpft wird.

  $(\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$

- Konjunktive Normalform: Darstellungsart einer booleschen Funktion, bei der eine Reihe von Volldisjunktionen konjunktiv verknüpft wird.

  $(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)$

Beispiel

Gesucht ist die disjunktive Normalform der Funktion

$f(a,b,c) = \neg a \wedge (b \equiv c)$

a	b	c	¬a	b ≡ c	f
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

$f(a,b,c) =$
$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee$
$(\neg a \wedge b \wedge c)$

Beispiel

Gesucht ist die konjunktive Normalform der Funktion

$f(a,b,c) = \neg a \Rightarrow (b \equiv c)$

a	b	c	¬a	b ≡ c	f3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$\neg(\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

$\neg(\neg a \wedge b \wedge \neg c)$

De Morgansches Gesetz:

$f(a,b,c) =$

$(a \vee b \vee \neg c) \wedge$

$(a \vee \neg b \vee c)$

Beispiel

Dualzahl dargestellt durch Eingänge a (MSB), b und c (LSB).
Ausgang x soll aktiviert werden, wenn Zahl < 4!

a	b	c	x
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

DNF:

$$\begin{aligned} f(a,b,c) = \ & (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee \\ & (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee \\ & (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee \\ & (\neg a \wedge b \wedge c) \end{aligned}$$

KNF: (als Übung)

Wann, welches Verfahren?

Vereinfachung?

Minimierungsverfahren

- Was
  - Schaltfunktion
- Warum
  - Reduzierung von Eingangsvariablen
  - Minimierung von Schaltkreiselementen
- Wie
  - Algebraische Umformungen
  - Quine-McCluskey
  - Karnaugh-Veitch
  - Heuristische Algorithmen (out of scope)

Algebraische Minimierung

- Gegeben Schaltfunktion
- Gesetze der Booleschen Algebra schrittweise anwenden, bis minimaler Ausdruck dargestellt ist.
- Problematisch
  - Keine systematische Vorgehensweise
  - Geschick und Erfahrung sind gefragt!
  - Nur für wenige Variablen praktisch anwendbar

Beispiel

$$f(a,b,c) = (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee$$
$$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$$

1. Anwendung Distributivgesetz:

$$((\neg a \wedge b) \wedge \neg c) \vee ((\neg a \wedge b) \wedge c) \vee$$
$$(\neg a \wedge (\neg b \wedge c)) \vee (a \wedge (\neg b \wedge c)) =$$

$$((\neg a \wedge b) \wedge (\neg c \vee c)) \vee$$
$$((\neg a \vee a) \wedge (\neg b \wedge c))$$

2. Anwendung Komplementgesetz:

$$((\neg a \wedge b) \wedge (1)) \vee ((1) \wedge (\neg b \wedge c)) =$$
$$(\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)$$

Verfahren nach Quine-McCluskey

- Gegeben Schaltfunktion
- Verfahren (im Überblick):
  - Initialisierung: Funktion in disjunktiver Normalform darstellen
  - Durch geschicktes Kombinieren Terme der Art $(x \vee \neg x)$ erzeugen, die in einer Konjunktion vorkommen. Diese können in weiterer Folge außer Betracht gelassen werden
  - Iterative Anwendung bis sogenannte Primimplikanten vorliegen
  - Ermittlung der disjunktiven Minimalform durch Streichen von Termen
- Systematisches Verfahren für beliebig viele Eingangs-variablen!

Verfahren nach Quine-McCluskey (1)

- Schritt 1 – Initialisierung:
  - Funktion in disjunktiver Normalform darstellen.
- Schritt 2a – Gruppierung:
  - Erstellen einer Tabelle mit unterschiedlichen Klassen K_i.
    K_i enthält alle Minterme mit i nicht-negierten Variablen.
- Schritt 2b – Ermittlung der Primimplikanten:
  - Minterme benachbarter Klassen K_i werden durch Anwendung des Distributivgesetzes zusammengefasst.

$$(A \wedge y) \vee (A \wedge \neg y) = A \wedge (y \vee \neg y) = A \wedge 1$$

- Schritt 2a + 2b – Iteration:
  - Durch wiederholte Anwendung von (a) und (b) wird die Anzahl der Eingangsvariablen in den einzelnen Teilausdrücken reduziert.

Beispiel

Vereinfachen Sie die folgende Funktion:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c,d) = \; & (a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee \\
& (a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee \\
& (a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee \\
& (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee \\
& (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)
\end{aligned}$$

Schritt 1 – **Initialisierung:**

– Funktion in disjunktiver Normalform darstellen. (OK)

Schritt 2

```
f(a,b,c,d) =
```

$$
\begin{aligned}
&(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee \\
&(a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee \\
&(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee \\
&(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee \\
&(a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee \\
&(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee \\
&(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee \\
&(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee \\
&(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee \\
&(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)
\end{aligned}
$$

Schritt 2a - Gruppieren

1	0	a	b	c	d
2	1	a	b	c	¬d
3		a	b	¬c	d
4	2	a	b	¬c	¬d
5		a	¬b	c	¬d
6		¬a	b	¬c	d
7		¬a	¬b	c	d
8	3	a	¬b	¬c	¬d
9		¬a	¬b	c	¬d
10		¬a	¬b	¬c	d

Schritt 2

Schritt 2a - Gruppieren

1	0	a	b	c	d
2	1	a	b	c	¬d
3		a	b	¬c	d
4	2	a	b	¬c	¬d
5		a	¬b	c	¬d
6		¬a	b	¬c	d
7		¬a	¬b	c	d
8	3	a	¬b	¬c	¬d
9		¬a	¬b	c	¬d
10		¬a	¬b	¬c	d

Schritt 2b - Reduzieren

1,2	0	a	b	c	
1,3		a	b		d
2,4	1	a	b		¬d
2,5		a		c	¬d
3,4		a	b	¬c	
3,6			b	¬c	d
4,8	2	a		¬c	¬d
5,8		a	¬b		¬d
5,9			¬b	c	¬d
6,10		¬a		¬c	d
7,9		¬a	¬b	c	
7,10		¬a	¬b		d

Schritt 2

Schritt 2b – Reduzieren

1,2	0	**a**	**b**	**c**	
1,3		**a**	**b**		**d**
2,4	1	**a**	**b**		**¬d**
2,5		**a**		**c**	**¬d**
3,4		**a**	**b**	**¬c**	
3,6			**b**	**¬c**	**d**
4,8	2	**a**		**¬c**	**¬d**
5,8		**a**	**¬b**		**¬d**
5,9			**¬b**	**c**	**¬d**
6,10		**¬a**		**¬c**	**d**
7,9		**¬a**	**¬b**	**c**	
7,10		**¬a**	**¬b**		**d**

Schritt 2a - Gruppieren

1	0	**a**	**b**	**c**	
2	1	**a**	**b**	**¬c**	
3	2	**¬a**	**¬b**	**c**	
4	0	**a**	**b**		**d**
5	1	**a**	**b**		**¬d**
6	2	**a**	**¬b**		**¬d**
7		**¬a**	**¬b**		**d**
8	1	**a**		**c**	**¬d**
9	2	**a**		**¬c**	**¬d**
10		**¬a**		**¬c**	**d**
11	1		**b**	**¬c**	**d**
12	2		**¬b**	**c**	**¬d**

Schritt 2

Schritt 2a – Gruppieren

1	0	**a**	**b**	**c**	
2	1	**a**	**b**	**¬c**	
3	2	**¬a**	**¬b**	**c**	
4	0	**a**	**b**		**d**
5	1	**a**	**b**		**¬d**
6	2	**a**	**¬b**		**¬d**
7		**¬a**	**¬b**		**d**
8	1	**a**		**c**	**¬d**
9	2	**a**		**¬c**	**¬d**
10		**¬a**		**¬c**	**d**
11	1		**b**	**¬c**	**d**
12	2		**¬b**	**c**	**¬d**

Schritt 2b - Reduzieren

1,2+4,5	0	**a**	**b**		
-, 3	2	**¬a**	**¬b**	**c**	
5,6+8,9	1	**a**			**¬d**
-, 7	2	**¬a**	**¬b**		**d**
-,10		**¬a**		**¬c**	**d**
-,11	1		**b**	**¬c**	**d**
-,12	2		**¬b**	**c**	**¬d**

Verfahren nach Quine-McCluskey (2)

- Schritt 3 – Streichen unnötig reduzierter Terme
  - Tabelle aufstellen: Primimplikanten werden Zeilen zugeordnet, Mintermen der disjunktiven Normalform werden Spalten zugeordnet.
  - Zuordnung treffen: Jedes Feld der Tabelle, das durch einen Primimplikanten und einen darin enthaltenen Minterm definiert ist, wird angekreuzt.
  - Wesentliche Primimplikanten suchen: Alle Spalten, die nur ein Kreuz enthalten, verweisen auf Primimplikanten, die als **einzige** einen der Minterme enthalten. Diese Primimplikanten müssen **unbedingt** verwendet werden.
  - Restmatrix erstellen: Die verbleibenden Minterme und Primimplikanten fasst man in der Restmatrix zusammen.

Schritt 3

Restliche Primimplikanten	a ∧ b ∧ c ∧ d	a ∧ b ∧ c ∧ ¬d	a ∧ b ∧ ¬c ∧ d	a ∧ b ∧ ¬c ∧ ¬d	a ∧ ¬b ∧ c ∧ ¬d	a ∧ ¬b ∧ ¬c ∧ ¬d	¬a ∧ b ∧ ¬c ∧ d	¬a ∧ ¬b ∧ c ∧ ¬d	¬a ∧ ¬b ∧ c ∧ d	¬a ∧ ¬b ∧ ¬c ∧ d
a b	X	X	X	X						
¬a ¬b c								X	X	
a ¬d		X		X	X	X				
¬a ¬b d									X	X
¬a ¬c d							X			X
b ¬c d			X				X			
¬b c ¬d					X			X		

$f = (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge d)$

Beispiel

Vereinfachen Sie die folgende Funktion:

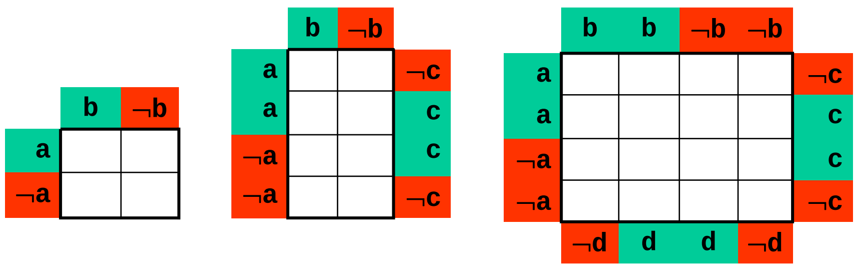
$$f(a,b,c,d) =$$
$$(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee$$
$$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$$
$$(a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$$
$$(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee$$
$$(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)$$

(Optimale) Lösung:

$$f(a,b,c,d) =$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge d)$$

Verfahren nach Karnaugh-Veitch

- Karnaugh-Veitch-Diagramme



- Große rechteckige Blöcke von Einsen finden und zusammenfassen.
- Kleine Teilmenge dieser Blöcke so auswählen, dass jede Eins des Diagramms in mindestens einem Block liegt.
- Jeden Block in Form eines booleschen Ausdrucks beschreiben, der nur UND-Verknüpfungen enthält.
- ODER-Verknüpfung aller so entstandenen Ausdrücke bilden.

Karnaugh-Veitch Diagramm

	b	b	¬b	¬b	
a					¬c
a					c
¬a			1	1	c
¬a			1	1	¬c
	¬d	d	d	¬d	

$(\neg a \land \neg b \land \neg c \land \neg d) \lor$
$(\neg a \land \neg b \land \neg c \land d) \lor$
$(\neg a \land \neg b \land c \land \neg d) \lor$
$(\neg a \land \neg b \land c \land d)$

$(\neg a \land \neg b)$

Karnaugh-Veitch Diagramm

	b	b	¬b	¬b	
a					¬c
a		1	1		c
¬a		1	1		c
¬a					¬c
	¬d	d	d	¬d	

$(\neg a \land \neg b \land c \land d) \lor$
$(\neg a \land b \land c \land d) \lor$
$(a \land \neg b \land c \land d) \lor$
$(a \land b \land c \land d)$

$(c \land d)$

Karnaugh-Veitch Diagramm

	b	b	$\neg b$	$\neg b$	
a	1	1	1	1	$\neg c$
a					c
$\neg a$					c
$\neg a$					$\neg c$
	$\neg d$	d	d	$\neg d$	

$(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$
$(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d) \vee$
$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$
$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$

$(a \wedge \neg c)$

Karnaugh-Veitch Diagramm

	b	b	$\neg b$	$\neg b$	
a	1	1			$\neg c$
a					c
$\neg a$					c
$\neg a$	1	1			$\neg c$
	$\neg d$	d	d	$\neg d$	

$(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$
$(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee$
$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$
$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$

$(b \wedge \neg c)$

Beispiel

```
f(a,b,c,d) =
(  a ∧  b ∧  c ∧  d ) ∨
(  a ∧  b ∧  c ∧ ¬d ) ∨
(  a ∧  b ∧ ¬c ∧  d ) ∨
(  a ∧  b ∧ ¬c ∧ ¬d ) ∨
(  a ∧ ¬b ∧  c ∧ ¬d ) ∨
(  a ∧ ¬b ∧ ¬c ∧ ¬d ) ∨
( ¬a ∧  b ∧ ¬c ∧  d ) ∨
( ¬a ∧ ¬b ∧  c ∧ ¬d ) ∨
( ¬a ∧ ¬b ∧  c ∧  d ) ∨
( ¬a ∧ ¬b ∧ ¬c ∧  d )
```

	b	b	¬b	¬b	
a	1	1		1	¬c
a	1	1		1	c
¬a			1	1	c
¬a		1	1		¬c
	¬d	d	d	¬d	

Beispiel

```
f(a,b,c,d) =
(  a ∧  b ∧  c ∧  d ) ∨
(  a ∧  b ∧  c ∧ ¬d ) ∨
(  a ∧  b ∧ ¬c ∧  d ) ∨
(  a ∧  b ∧ ¬c ∧ ¬d ) ∨
(  a ∧ ¬b ∧  c ∧ ¬d ) ∨
(  a ∧ ¬b ∧ ¬c ∧ ¬d ) ∨
( ¬a ∧  b ∧ ¬c ∧  d ) ∨
( ¬a ∧ ¬b ∧  c ∧ ¬d ) ∨
( ¬a ∧ ¬b ∧  c ∧  d ) ∨
( ¬a ∧ ¬b ∧ ¬c ∧  d )
```

	b	b	¬b	¬b	
a	1	1		1	¬c
a	1	1		1	c
¬a			1	1	c
¬a		1	1		¬c
	¬d	d	d	¬d	

```
f = (a ∧ b)
```

Beispiel

$f(a,b,c,d) =$

$$
\begin{aligned}
&(a \land b \land c \land d) \lor \\
&(a \land b \land c \land \neg d) \lor \\
&(a \land b \land \neg c \land d) \lor \\
&(a \land b \land \neg c \land \neg d) \lor \\
&(a \land \neg b \land c \land \neg d) \lor \\
&(a \land \neg b \land \neg c \land \neg d) \lor \\
&(\neg a \land b \land \neg c \land d) \lor \\
&(\neg a \land \neg b \land c \land \neg d) \lor \\
&(\neg a \land \neg b \land c \land d) \lor \\
&(\neg a \land \neg b \land \neg c \land d)
\end{aligned}
$$

	b	b	¬b	¬b	
a	1	1		1	¬c
a	1	1		1	c
¬a			1	1	c
¬a		1	1		¬c
	¬d	d	d	¬d	

$f = (a \land b) \lor (a \land \neg d)$

Beispiel

$f(a,b,c,d) =$

$$
\begin{aligned}
&(a \land b \land c \land d) \lor \\
&(a \land b \land c \land \neg d) \lor \\
&(a \land b \land \neg c \land d) \lor \\
&(a \land b \land \neg c \land \neg d) \lor \\
&(a \land \neg b \land c \land \neg d) \lor \\
&(a \land \neg b \land \neg c \land \neg d) \lor \\
&(\neg a \land b \land \neg c \land d) \lor \\
&(\neg a \land \neg b \land c \land \neg d) \lor \\
&(\neg a \land \neg b \land c \land d) \lor \\
&(\neg a \land \neg b \land \neg c \land d)
\end{aligned}
$$

	b	b	¬b	¬b	
a	1	1		1	¬c
a	1	1		1	c
¬a			1	1	c
¬a		1	1		¬c
	¬d	d	d	¬d	

$f = (a \land b) \lor (a \land \neg d) \lor (\neg a \land \neg b \land c)$

Beispiel

f(a,b,c,d) =

$(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee$
$(a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee$
$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee$
$(a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$
$(a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee$
$(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$
$(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee$
$(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee$
$(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee$
$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d)$

	b	b	¬b	¬b	
a	1	1		1	¬c
a	1	1		1	c
¬a			1	1	c
¬a		1	1		¬c
	¬d	d	d	¬d	

$f = (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge d)$

Literatur

M. Karnaugh: *The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers (IEE), Vol. 72 (9), pp. 593-599, 1953.

E.L. McCluskey: *Minimization of Boolean Functions*, Bell System Technical Journal, Vol. 35, pp. 437-457, 1956.

W. Quine: *The Problem of Simplifying Truth Functions*, American Mathematical Monthly, Vol. 59 (8), pp. 521-531, 1952.

E.W. Veitch: *A Chart Method for Simplifying Truth Functions*, Proceedings of the 1952 ACM National Meeting, pp. 127-133, 1952.